



La conjecture de Casas Alvero pour les degrés $5p^e$

Mustapha Chellali

► To cite this version:

| Mustapha Chellali. La conjecture de Casas Alvero pour les degrés $5p^e$. 2012. hal-00748843

HAL Id: hal-00748843

<https://hal.science/hal-00748843>

Preprint submitted on 8 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La conjecture de Casas Alvero pour les degré $5p^e$

Mustapha CHELLALI & Alain SALINIER

Résumé : Selon la conjecture de Casas Alvero, si un polynôme à une variable de degré n sur un corps commutatif de caractéristique 0 est non premier avec chacune de ses $n - 1$ premières dérivées, alors il est de forme $c(X - r)^n$. Soient p un nombre premier et e un entier, la conjecture a été démontrée pour les polynômes de degré $p^e, 2p^e, 3p^e$ ($p \neq 2$) et $4p^e$ ($p \neq 3, 5, 7$). Dans ce travail on montre que la conjecture est vrai pour les polynômes de degré $5p^e$ ($p \neq 2, 3, 7, 11, 131, 193, 599, 3541, 8009$). On corrige aussi une erreur dans [4] pour les degré $4p^e$

1 Introduction

Soit k un corps commutatif, $P \in k[X]$ un polynôme de degré n , la conjecture de Casas-Alvero veut que si P est non premier avec chacune de ses $n - 1$ premières dérivées, alors c'est un monôme, c'est-à-dire de la forme $c(X - r)^n$. Cette conjecture est évidemment fausse si la caractéristique de k est $\neq 0$ comme le montre l'exemple $P = X^{p+1} - X^p$ en caractéristique p . Suivant [6], il importe de modifier l'énoncé de la conjecture en caractéristique $\neq 0$, en remplaçant les dérivés ordinaire $P^{(i)}$ par les dérivés de Hasse définies par $P(X + h) = \sum_i P_i(h)X^i$ (en caractéristique 0 on a simplement $P_i = P^{(i)}/i!$). Un lien intéressant a été trouvé entre la conjecture en caractéristique 0 et la conjecture en caractéristique $p \neq 0$ (cf [6] voir aussi [4] pour une preuve élémentaire), en notons $\overline{\mathbb{F}}_p$ la clôture algébrique de \mathbb{F}_p , il s'énonce comme suit :

Proposition 1.1 *Soit n un entier ≥ 1*

- *Si pour un nombre premier donné p la conjecture de Casas-Alvero est vrai sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout polynôme de degré n , alors elle est vrai en caractéristique 0 pour tout polynôme de degré de la forme np^e ($e \in \mathbb{N}$)*
- *Inversement si la conjecture est vrai en caractéristique 0 pour tout polynôme de degré n , alors elle est vrai sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout polynôme de degré n , sauf peut être pour un nombre fini de p .*

Comme conséquence on obtient :

- Pour $n = 1$, il n'y a aucun mauvais nombre premier, par conséquent la conjecture est vrai pour tout polynôme de degré p^e (p premier)

- Pour $n = 2$, si un polynôme de degré 2 vérifie les hypothèses de Casas-Alvero, comme il a une racine double, c'est un monôme, par suite la conjecture est vraie pour tout polynôme de degré $2p^e$ (p premier)
- Pour $n = 3$, cherchons les mauvais nombres premiers, soit p un nombre premier, soit P un polynôme de degré 3 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant les hypothèses de Casas-Alvero, après transformation affine on se ramène à P de la forme $X^3 - aX^2$, écartons d'abord les cas $p = 2, 3$ puisque la conjecture de Casas-Alvero est vérifiée pour 3^e et que on sait que $X^3 - X^2$ est un contre exemple en caractéristique 2

$$\begin{cases} P' = 3X^2 - 2aX \\ P_2 = 3X - a \end{cases}$$

Si 0 est racine de $P'' \rightarrow a = 0 \rightarrow P = X^3$, sinon la racine de P'' en commun avec P est $a \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0$. Ainsi 2 est le seul mauvais nombre premier.

Conclusion : Si p est nombre premier $\neq 2$ la conjecture de Casas-Alvero est vraie pour les polynômes de degré $3p^e$

- Pour $n = 4$, cherchons les mauvais nombres premiers, soit p un nombre premier, soit P un polynôme de degré 4 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant les hypothèses de Casas-Alvero, après transformation affine on se ramène à P de la forme $X^4 - aX^3 + bX^2$, écartons d'abord les cas $p = 2, 3$ puisque la conjecture de Casas-Alvero est vérifiée pour 2^e et que on sait que $X^4 - X^3$ est un contre exemple en caractéristique 3.

$$\begin{cases} P' = 4X^3 - 3aX^2 + 2bX \\ P_2 = 6X^2 - 3aX + b \\ P_3 = 4X - a \end{cases}$$

Supposons d'abord que 0 n'est pas racine de P'' et P''' soit $ab \neq 0$, écrivons $P = X^2(X - x_1)(X - x_2)$, soient α, β les racines de P'' et P''' en commun avec P , on peut supposer que $\beta = x_1$, deux cas sont alors possibles $(\alpha, \beta) = (x_1, x_1)$ ou $(\alpha, \beta) = (x_2, x_1)$

– 1 er cas : $(\alpha, \beta) = (x_1, x_1)$

$$\begin{cases} 4x_1 = a = x_1 + x_2 \rightarrow x_2 = 3x_1 \\ 6x_1^2 - 12x_1^2 + b = 0 \rightarrow b = 6x_1^2 \text{ soit } 6x_1^2 = x_1x_2 = 3x_1^2 \rightarrow x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

– 2 ème cas : $(\alpha, \beta) = (x_2, x_1)$

$$\begin{cases} 4x_1 = a = x_1 + x_2 \rightarrow x_2 = 3x_1 \\ 6x_2^2 - 12x_1x_2 + b = 0 \rightarrow b = -2x_2^2 \text{ soit } -2x_2^2 = x_1x_2 = 3x_1^2 \rightarrow 21x_1^2 = 0 \rightarrow p = 7 \end{cases}$$

Inversement si $p = 7$, prenons $x_1 = 1$ et $x_2 = 3x_1 = 3$ et $P = X^2(X - 1)(X - 3)$ on a $P'''(1) = 0$ et $P''(3) = 0$, donc P vérifie les hypothèses de Casas-Alvero dans $\overline{\mathbb{F}}_7$ et n'est pas monôme, ainsi 7 est un mauvais nombre premier.

Supposons maintenant que 0 est racine de P'' ou P''' soit a ou $b = 0$ (mais pas les deux car dans ce cas P serait monôme et p un bon nombre premier)

- $a = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 0$, on peut supposer que la racine de P'' est alors $x_1 \neq 0 \rightarrow 6x_1^2 + b = 0 \rightarrow b = -6x_1^2 = x_1x_2 = -x_1^2 \rightarrow 5x_1^2 = 0 \rightarrow p = 5$. Inversement si $p = 5$, posons $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$ et $P = X^2(X-1)(X+1)$ on a $P'(0) = P'''(0) = 0$ et $P''(1) = 6 - 1 = 0$, donc P vérifie les hypothèses de Casas-Alvero dans $\overline{\mathbb{F}}_5$ et n'est pas monôme, ainsi 5 est un mauvais nombre premier. Ce cas est passé inaperçu dans [4] suite à une erreur de considération de déterminant (cf page 33)
- $b = 0 \rightarrow x_1x_2 = 0$, on peut supposer que la racine de P''' est alors $x_1 \neq 0 \rightarrow 4x_1 - a = 0 \rightarrow a = 4x_1 = x_1 + x_2 \rightarrow 3x_1^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$.

Conclusion : Si p est nombre premier $\neq 3, 5, 7$ la conjecture de Casas-Alvero est vraie pour les polynômes de degré $4p^e$

2 Cas des degrés $5p^e$

Notre résultat principal est :

Proposition 2.2 *La conjecture de Casas-Alvero est vraie pour les polynômes de degré $5p^e$, e entier et p premier $\neq 2, 3, 7, 11, 131, 193, 599, 3541, 8009$*

Preuve : Nous allons poursuivre les méthodes ci-dessus pour déterminer les mauvais nombres premiers pour les polynômes de degré 5. Soit P un polynôme de degré 5 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant les hypothèses de Casas-Alvero, après transformation affine on se ramène à P de la forme $X^5 - aX^4 + bX^3 - cX^2$, écartons d'abord les cas $p = 2, 3, 5$ puisque la conjecture de Casas-Alvero est vérifiée pour 5^e et que $X^5 - X^4$ est un contre exemple en caractéristique 2 et $X^5 + X^4$ est un contre exemple en caractéristique 3.

$$\begin{cases} P' = 5X^4 - 4aX^3 + 3bX^2 - 2cX \\ P_2 = 10X^3 - 6aX^2 + 3bX - c \\ P_3 = 10X^2 - 4aX + b \\ P_4 = 5X - a \end{cases}$$

Soient α, β, γ les racines de $P'', P''', P^{(4)}$ en commun avec P , nous distinguons deux cas :

- 1^{er} cas : $0 \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Ecrivons $P = X^2(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, on peut supposer $\gamma = x_1$

– Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_1, x_1, x_1)$

$$\begin{cases} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \rightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_1) = 0 \rightarrow 10x_1^2 - 20x_1^2 + b = 0 \\ \rightarrow b = 10x_1^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \rightarrow \boxed{6x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0} \\ P_2(x_1) = 0 \rightarrow 10x_1^3 - 30x_1^3 + 30x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0 \rightarrow 10x_1^2 = x_2x_3 = x_2(4x_1 - x_2) \\ \rightarrow \boxed{10x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0} \end{cases}$$

Comme x_1 est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} r^2 - 4r + 6 = 0 \\ r^2 - 4r + 10 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $16 \neq 0$ puisque $p \neq 2$, par suite ce cas est impossible.

– Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_3, x_2, x_1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^2 - 20x_1x_2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = -10x_2^2 + 20x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \\ \longrightarrow \boxed{4x_1^2 - 16x_1x_2 + 9x_2^2 = 0} \\ P_2(x_3) = 0 \longrightarrow 10x_3^3 - 30x_1x_3^2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2)x_3 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_3^2 - 30x_1x_3 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_1x_2 = 0 \\ \longrightarrow 10(4x_1 - x_2)^2 - 30x_1(4x_1 - x_2) + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_1x_2 = 0 \\ \longrightarrow \boxed{40x_1^2 + 9x_1x_2 - 20x_2^2 = 0} \end{array} \right.$$

Comme x_1 est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} 9r^2 - 16r + 4 = 0 \\ -20r^2 + 9r + 40 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $32036 = 2^2 \cdot 8009$ puisque $p \neq 2$ cela n'est possible que si $p = 8009$. Inversement si $p = 8009$ on va remonter ces équations pour construire un contre exemple modulo p . éliminon r entre ces deux équations on obtient $r = 440/239 = 2113 \text{ mod } 8009$. En fixant $x_1 = 1$ alors $x_2 = r$ et $x_3 = 4x_1 - x_2 = 4 - r$, cela donne le contre exemple :

$$P = x^2(x-1)(x-r)(x-4+r) = x^5 - 5x^4 - 3309x^3 + 3313x^2 \quad \text{mod } 8009$$

On vérifie bien que modulo 8009 on a

$$\begin{aligned} P_4(1) &= 0 \\ P_3(r) &= 0 \\ P_2(4-r) &= 0 \end{aligned}$$

– Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_2, x_1, x_1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_1) = 0 \longrightarrow 10x_1^2 - 20x_1^2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = 10x_1^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \longrightarrow \boxed{6x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0} \\ P_2(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^3 - 30x_1x_2^2 + 30x_1^2x_2 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_2^2 - 30x_1x_2 + 30x_1^2 - x_1x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_2^2 - 30x_1x_2 + 30x_1^2 - x_1(4x_1 - x_2) = 0 \\ \longrightarrow \boxed{26x_1^2 - 29x_1x_2 + 10x_2^2 = 0} \end{array} \right.$$

Comme x_1 est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} r^2 - 4r + 6 = 0 \\ 10r^2 - 29r + 26 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $386 = 2.193$ puisque $p \neq 2$ cela n'est possible que si $p = 193$. Inversement si $p = 193$ on va remonter ces équations pour construire un contre exemple modulo p . éliminon r entre ces deux équations on obtient $r = 34/11 = 161 \text{ mod } 193$. En fixant $x_1 = 1$ alors $x_2 = r$ et $x_3 = 4x_1 - x_2 = 4 - r$, cela donne le contre exemple :

$$P = x^2(x-1)(x-r)(x-4+r) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 6x^2 \quad \text{mod } 193$$

On vérifie bien que modulo 193 on a

$$\begin{aligned} P_4(1) &= 0 \\ P_3(r) &= 0 \\ P_2(4-r) &= 0 \end{aligned}$$

– Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_1, x_2, x_1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^2 - 20x_1x_2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = -10x_2^2 + 20x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \\ \longrightarrow \boxed{4x_1^2 - 16x_1x_2 + 9x_2^2 = 0} \\ P_2(x_1) = 0 \longrightarrow 10x_1^3 - 30x_1x_2^2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2)x_1 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_1^2 - 30x_1x_1 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_1^2 - 30x_1x_1 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_2(4x_1 - x_2) = 0 \\ \longrightarrow \boxed{-20x_1^2 + 56x_1x_2 - 29x_2^2 = 0} \end{array} \right.$$

Comme x_1 est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} 9r^2 - 16r + 4 = 0 \\ 29r^2 - 56r + 20 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $256 = 2^8$ puisque $p \neq 2$ ce cas est impossible.

– Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_2, x_2, x_1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^2 - 20x_1x_2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = -10x_2^2 + 20x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \\ \longrightarrow \boxed{4x_1^2 - 16x_1x_2 + 9x_2^2 = 0} \\ P_2(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^3 - 30x_1x_2^2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2)x_2 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_2^2 - 30x_1x_2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_1x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_2^2 - 30x_1x_2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_1(4x_1 - x_2) = 0 \\ \longrightarrow \boxed{-4x_1^2 + 31x_1x_2 - 20x_2^2 = 0} \end{array} \right.$$

Comme x_1 est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} 9r^2 - 16r + 4 = 0 \\ 20r^2 - 31r + 4 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $-524 = -2^2.131$ puisque $p \neq 2$ cela n'est possible que si $p = 131$. Inversement si $p = 131$ on va remonter ces équations pour construire un contre exemple modulo p . éliminon r entre ces deux équations on obtient $r = 44/41 = 49 \text{ mod } 131$. En fixant $x_1 = 1$ alors $x_2 = r$ et $x_3 = 4x_1 - x_2 = 4 - r$, cela donne le contre exemple :

$$P = x^2(x-1)(x-r)(x-4+r) = x^5 - 5x^4 + 26x^3 - 22x^2 \quad \text{mod } 131$$

On vérifie bien que modulo 131 on a

$$\begin{aligned} P_4(1) &= 0 \\ P_3(r) &= 0 \\ P_2(4-r) &= 0 \end{aligned}$$

- 2 ème cas : $0 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Autrement dit a ou b ou $c = 0$, on a les resultants

$$Res_x(P, P_2) = 100 a^3 c^4 - 24 a^2 b^2 c^3 - 459 a b c^4 + 98 b^3 c^3 + 729 c^5$$

$$Res_x(P, P_3) = 96 a^3 b^2 c - 18 a^2 b^4 - 480 a b^3 c + 81 b^5 + 1000 b^2 c^2$$

$$Res_x(P, P^{(4)}) = 4 a^5 - 25 b a^3 + 125 c a^2$$

– 1er cas : $a = 0$

Dans ce cas les resultants ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned} Res_x(P, P_2) &= c^3(98 b^3 + 729 c^2) \\ Res_x(P, P_3) &= b^2(81 b^3 + 1000 c^2) \end{aligned}$$

Si P vérifie les hypothèses de Casas-Alvero on aura alors

$$\begin{aligned} c^3(98 b^3 + 729 c^2) &= 0 \\ b^2(81 b^3 + 1000 c^2) &= 0 \end{aligned}$$

Si $c = 0 \rightarrow 81b^5 = 0 \rightarrow b = 0$ car $p \neq 3$. Si $b = 0 \rightarrow 729c^5 = 0$, soit $9^3c^5 = 0 \rightarrow c = 0$. si $bc \neq 0$ le système ci-dessus a un déterminant nul :

$$98.1000 - 81.729 = 0$$

Soit $11.3541 = 0 \rightarrow p = 11$ ou $p = 3541$

- * Cas $p = 11$ prenons $c = 1$ il faut que $b^3 = -729/98 = 3 \bmod 11 \longrightarrow b = -2$, d'où :

$$P = x^5 - 10x^3 - 3x^2$$

On vérifie que

$$P = x^2(x+1)(x+3)(x-4) \bmod 11$$

On vérifie que

$$P_2(-3) = 0 \bmod 11$$

$$P_3(-3) = 0 \bmod 11$$

$$P_4(0) = 0 \bmod 11$$

- * Cas $p = 3541$ pour réaliser $81b^3 + 1000c^2 = 0$ il suffit de prendre $b = -10$ et $c = 9$:

$$P = x^5 - 10x^3 - 9x^2$$

On vérifie que

$$P = x^2(x+1)(x-1567)(x+1566) \bmod 3541$$

On vérifie que

$$P_2(1567) = 0 \bmod 3541$$

$$P_3(-1) = 0 \bmod 3541$$

$$P_4(0) = 0 \bmod 3541$$

– 2ème cas : $b = 0$

Dans ce cas les resultants ci-dessus deviennent :

$$Res_x(P, P_2) = c^4 \cdot (100a^3 + 729c)$$

$$Res_x(P, P_4) = a^2 \cdot (4a^3 + 125c)$$

Si P vérifie les hypothèses de Casas-Alvero on aura alors

$$c^4 \cdot (100a^3 + 729c) = 0$$

$$a^2 \cdot (4a^3 + 125c) = 0$$

Si $c = 0 \longrightarrow 4a^5 = 0 \longrightarrow a = 0$ car $p \neq 2$. Si $a = 0 \longrightarrow 729c^5 = 0$, soit $9^3c^5 = 0 \longrightarrow c = 0$. si $ac \neq 0$ le système ci-dessus a un déterminant nul :

$$100.125 - 4.729 = 0$$

Soit $9584 = 2^4.599 = 0 \longrightarrow p = 599$. Pour réaliser $a^2 \cdot (4a^3 + 125c) = 0$ prenons $c = 4$ et $a = -5$ d'où :

$$P = x^5 + 5x^4 - 4x^2$$

On vérifie que

$$P = x^2(x+1)(x+269)(x-265) \mod 599$$

et

$$P_2(-269) = 0 \mod 599$$

$$P_3(0) = 0 \mod 599$$

$$P_4(-1) = 0 \mod 599$$

– 3ème cas : $c = 0$

Dans ce cas les resultants ci-dessus deviennent :

$$Res_x(P, P_3) = (-9) \cdot b^4 \cdot (2a^2 - 9b)$$

$$Res_x(P, P_4) = a^3 \cdot (4a^2 - 25b)$$

Si P vérifie les hypothèses de Casas-Alvero on aura alors

$$(-9) \cdot b^4 \cdot (2a^2 - 9b) = 0$$

$$a^3 \cdot (4a^2 - 25b) = 0$$

Si $b = 0 \longrightarrow 4a^5 = 0 \longrightarrow a = 0$ car $p \neq 2$. Si $a = 0 \longrightarrow 9^2b^5 = 0 \longrightarrow b = 0$. si $ab \neq 0$ le système ci-dessus a un déterminant nul :

$$2 \cdot (-25) + 4 \cdot 9 = 0$$

Soit $-14 = -2 \cdot 7 = 0 \longrightarrow p = 7$. Pour réaliser $(-9) \cdot b^4 \cdot (2a^2 - 9b) = 0$ prenons $b = 2$ et $a = 3$ d'où :

$$P = x^5 - 3x^4 + 2x^3$$

On vérifie que

$$P = x^3(x-1)(x-2) \mod 7$$

et

$$P_2(0) = 0 \mod 7$$

$$P_3(1) = 0 \mod 7$$

$$P_4(2) = 0 \mod 7$$

3 Conclusion

- Les resultats ci dessus ne permettent pas de décider pour les degrés : 12,20,24,28,30,35,36,...
- Les méthode ci dessus ne semblent pas s'étendre au cas du degrés 6, le contre exemple de [6]

$$P = X^6 + 3144481702696843X^4 + X^3 + 2707944513497181X^2$$

$$p = 7390044713023799$$

laisse supposer que les mauvais nombres premiers de ce cas sont très grands et leur nombre est grand

References

- [1] Casas Alvero., *Higher order polar germs*, Journal of Algebra 240,. (2001) 240, 1, 326-337,
- [2] G. Diaz-Toca and L. Gonzalez-Vega *On a conjecture about univariate polynomials and their roots*. In A. Dolzmann, A. Seidl, and T. Sturm, editors, Algorithmic Algebra and Logic 2005, pages 83 -90, Norderstedt, Germany, 2005. Books on Demand.
- [3] Jan Draisma, *On the Casas-Alvero conjecture* <http://www.win.tue.nl/~jdraisma/talks/casasalverotalk.pdf>
- [4] Draisma, Jan; and Jong, Johan P. *On the Casas-Alvero conjecture. (English)* Eur. Math. Soc. Newsl. 80, 29-33 (2011). MSC2000: *37-99 30-99 .
- [5] Duong Hoang Dung, *On the Cassa-Alvero Conjecture* http://www.math.leidenuniv.nl/~edix/tag_2009/duong_2.pdf
- [6] Hans-Christian graf von bothmer, Oliver Labs, Josef Schicho, and Christiaan Van de woestijne , *The Casas-Alvero conjecture for infinitely many degrees*, <http://arxiv.org/abs/math/0605090v2>

Polynomials over commutative rings
MSC-numbers 2000: 13M10 13P05 13P10 P

Adresses des auteurs

Prof M.Chellali
Département de mathématiques
Faculté des sciences, Université Mohammed 1
Oujda, Maroc.

Prof Alain Salinier
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques de Limoges
123, avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES Cedex (FRANCE)

email : mustapha.chellali@gmail.com
 alain.salinier@unilim.fr